

Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n

Comptes Rendus, 2 Jan. 1917

1. Les divers Problèmes de la théorie de la partition des nombres ont été étudiés surtout par les mathématiciens anglais, Cayley, Sylvester et Macmahon*, qui les ont abordés d'un point de vue purement algébrique. Ces auteurs n'y ont fait aucune application des méthodes de la théorie des fonctions, de sorte qu'on ne trouve pas, dans la théorie en question, de formules asymptotiques, telles qu'on en rencontre, par exemple, dans la théorie des nombres premiers. Il nous semble donc que les résultats que nous allons faire connaître peuvent présenter quelque nouveauté.

2. Nous nous sommes occupés surtout de la fonction $p(n)$, nombre des partitions de n . On a

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} = \sum_0^{\infty} p(n)x^n \quad (|x| < 1).$$

Nous avons pensé d'abord à faire usage de quelque théorème de caractère *Taubérien*: on désigne ainsi les théorèmes réciproques du théorème classique d'Abel et de ses généralisations. A cette catégorie appartient l'énoncé suivant:

Soit $g(x) = \sum a_n x^n$ une série de puissances à coefficients POSITIFS, telle qu'on ait

$$\log g(x) \sim \frac{A}{1-x},$$

quand x tend vers un par valeurs positives. Alors on a

$$\log s_n = \log (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \sim 2\sqrt{(An)},$$

quand n tend vers l'infini†.

En posant $g(x) = (1-x)f(x)$, on a

$$A = \frac{\pi^2}{6};$$

et nous en tirons

$$p(n) = e^{\pi\sqrt{(\frac{2}{3}n)(1+\epsilon)}}, \tag{1}$$

où ϵ tend vers zéro avec $1/n$.

*Voir le grand traité *Combinatory Analysis* de M. P. A. Macmahon (Cambridge, 1915-16).

†Nous avons donné des généralisations étendues de ce théorème dans un mémoire qui doit paraître dans un autre recueil. [The paper referred to is No. 34 of this volume; see, in particular, pp. 314 – 322.]

3. Pour pousser l'approximation plus loin, il faut recourir au théorème de Cauchy. Des formules

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(x)}{x^{n+1}} dx,$$

avec un chemin d'intégration convenable intérieur au cercle de rayon un, et

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{24}}}{\sqrt{(2\pi)}} \sqrt{\left(\log \frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{\pi^2}{6 \log(1/x)}\right) f\left\{\exp\left(-\frac{4\pi^2}{\log(1/x)}\right)\right\}} \quad (2)$$

(fournie par la théorie de la transformation linéaire des fonctions elliptiques), nous avons tiré, en premier lieu, la formule vraiment asymptotique

$$p(n) \sim P(n) = \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}. \quad (3)$$

On a

$$\begin{aligned} p(10) &= 42, & p(20) &= 627, & p(50) &= 204226, & p(80) &= 15796476; \\ P(10) &= 48, & P(20) &= 692, & P(50) &= 217590, & P(80) &= 16606781. \end{aligned}$$

Les valeurs correspondantes de $P(n) : p(n)$ sont

$$1.145; 1.104; 1.065; 1.051 :$$

la valeur approximative est toujours en excès.

4. Mais nous avons abouti plus tard à des résultats beaucoup plus satisfaisants. Nous considérons la fonction

$$F(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_1^\infty \frac{d}{dn} \left\{ \frac{\cosh[\pi\sqrt{\{\frac{2}{3}(n - \frac{1}{24})\}}] - 1}{\sqrt{(n - \frac{1}{24})}} \right\} x^n. \quad (4)$$

En faisant usage des formules sommatoires que démontre M. E. Lindelöf dans son beau livre *Le calcul des résidus*, on trouve aisément que $F(x)$ (on parle, il va sans dire, de la branche principale) a pour seul point singulier le point $x = 1$, et que la fonction

$$F(x) - \frac{x^{\frac{1}{24}}}{\sqrt{(2\pi)}} \sqrt{\left(\log \frac{1}{x}\right) \left[\exp\left\{\frac{\pi^2}{6 \log(1/x)}\right\} - 1\right]}$$

est régulière pour $x = 1$. On est conduit naturellement à appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $f(x) - F(x)$, et l'on trouve

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \frac{e^{\pi\sqrt{\{\frac{2}{3}(n - \frac{1}{24})\}}}}{\sqrt{(n - \frac{1}{24})}} + O(e^{k\sqrt{n}}) = Q(n) + O(e^{k\sqrt{n}}), \quad (5)$$

où k désigne un nombre quelconque supérieur à $\pi/\sqrt{6}$. L'approximation, pour des valeurs assez grandes de n , est très bonne: on trouve, en effet,

$$\begin{aligned} p(61) &= 1121505, & p(62) &= 1300156, & p(63) &= 1505499; \\ Q(61) &= 1121539, & Q(62) &= 1300121, & Q(63) &= 1505536. \end{aligned}$$

La valeur approximative est, pour les valeurs suffisamment grandes de n , alternativement en excès et en défaut.

5. On peut pousser ces calculs beaucoup plus loin. On forme des fonctions, analogues à $F(x)$, qui présentent, pour les valeurs

$$x = -1, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{-\frac{2}{3}\pi i}, i, -i, e^{\frac{2}{5}\pi i}, \dots,$$

des singularités d'un type très analogue à celles que présente $f(x)$. On soustrait alors de $f(x)$ une somme d'un nombre fini convenable de ces fonctions. On trouve ainsi, par exemple,

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \frac{e^{\pi\sqrt{\{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})\}}}}{\sqrt{(n-\frac{1}{24})}} + \frac{(-1)^n}{2\pi} \frac{d}{dn} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})\}}}}{\sqrt{(n-\frac{1}{24})}} \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{18}\right) \frac{d}{dn} \frac{e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{\{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})\}}}}{\sqrt{(n-\frac{1}{24})}} + O(e^{k\sqrt{n}}), \end{aligned} \quad (6)$$

où k désigne un nombre quelconque plus grand que $\frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.